UNE GENESE STOCHASTIQUE DE LA DISTRIBUTION DE *WEIBULL*

Journées de Fiabilité des Matériaux et Structures

JFMS '12 - Chambéry - Juin 2012

Lambert Pierrat

LJ- CONSULTING,
ASTE & LJK-LAB

UNE GENESE STOCHASTIQUE DE LA DISTRIBUTION DE *WEIBULL*

SOMMAIRE

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
histoire & applications

- ORIGINE

- *W. Weibull* (1887-1979) - dès 1939 :
- étude expérimentale usure roulements
- modèle de rupture des matériaux

- principe du « maillon le plus faible »
- modèle de défauts ou fissures
- répartition volumique dans un solide

- *B. Epstein* (1948) établit la relation entre ce principe et une loi statistique des valeurs extrêmes

- MULTIPLES APPLICATIONS
- Mécanique des matériaux :
- métalliques (ferreux, alliages)
- fragiles (verres, céramiques, roches) ductiles (polymères)
- composites (anisotropes), etc...
- Mécanique des Structures :
- Electronique :
- composants passifs
- composants actifs
- Electricité :
- matériaux isolants
- moteurs, transformateurs
- batteries, etc...

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
formulation statistique

- Formulation statistique
- Distribution standardisée

- densité de probabilité

$$f(t/\eta) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp - \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

- fonction de répartition

$$F(t/\eta) = 1 - \exp - \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

- taux de défaillance instantané

$$h(t/\eta) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1}$$

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
diverses genèses

- GENESE STATISTIQUE
  - Loi asymptotique des valeurs extrêmes (*Gumbel III*)
  - reproduction par valeurs minimales
  - lois parentes bornées (x > 0)

- GENESES PROBABILISTES
- (exemples)
  - interaction R/C : contrainte croissante et résistance décroissante : probabilité défaillance asymptotique
  - rupture diélectrique : modèles fluctuation, percolation
  - modèle rupture réseau fibres : redistribution charges
  - distribution fractale micro-fissures : beta < 2D = 6
  - vitesse dégradation aléatoire : durée atteinte seuil
  - modèle dynamique rupture : compétition entre constantes temps(dommage local et cicatrisation)
  - etc...

- GENESE STOCHASTIQUE (?)
  - processus dynamique temporel avec paramètres aléatoires : ODF / SDE
  - introduction bruit gaussien

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
modèle stochastique

- EQUATION DIFFERENTIELLE STOCHASTIQUE(SDE)

- premier ordre (minimal)

$$\frac{\partial X}{\partial t} = X \cdot \left[F(X) + \xi(t)\right]$$

- interaction non linéaire

$$F(X) = A - B \cdot X^n$$

-
- bruit gaussien multiplicatif

$$< \xi(t+\tau) \cdot \xi(t) > = \sigma^2 \cdot \delta(\tau)$$

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
processus de diffusion

- PROBABILITE DE TRANSITION

- équation de FPK

$$\frac{\partial}{\partial t}\cdot[P]=-\frac{\partial}{\partial X}\cdot[a(X)\cdot P]+\frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2}{\partial X^2}\cdot[b(X)\cdot P]$$

- processus de diffusion

- paramètre de dérive

$$a(X)\equiv(X)\cdot\left(F(X)+\sigma^2/2\right)$$

- paramètre de fluctuation

$$b(X)\equiv\sigma^2\cdot(X)^2$$

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
solution stationnaire

- DENSITE DE PROBABILITE

- solution stationnaire

$$f\left(X, t\rightarrow\infty\right)=\left[\frac{C}{b\left(X\right)}\right]\cdot\exp\left[\int_X\left[2\cdot a(u)/b(u)\right]\cdot du\right]$$

- condition de normalisation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f\left(X\right)\cdot dX \equiv 1$$

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
solution standardisée

- solution générale
- 1 constante de normalisation (C)
- 1 paramètre d 'échelle
- 2 paramètres de forme
-

- DENSITE DE PROBABILITE

$$f(X) = C \cdot (X)^{\alpha} \cdot \exp -(X/\eta)^{\beta}$$

$$\eta(B,n,\sigma) = \left(n \cdot \sigma^{2}/2B\right)^{1/n}$$

$$\alpha(A,n,\sigma) = \left(\left(2A/n \cdot \sigma^{2}\right) - 1\right)$$

$$\beta(n) = n$$

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
processus identification

- DENSITE DE PROBABILITE

- solution générale

$$f(X) = C \cdot (X)^{\alpha} \cdot \exp -(X/\eta)^{\beta}$$

- densité de *Weibull*

$$f(t/\eta) = \left(\frac{\beta}{\eta}\right) \cdot \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \cdot \exp -\left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta}$$

- conditions d 'identité

$$\sigma \equiv \sqrt{2A}/n \qquad \alpha \equiv (\beta - 1)$$

- paramètres de *Weibull*

$$\beta_W \equiv n \qquad \eta_W \equiv (A/B \cdot n)^{1/n}$$

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
influence nature perturbations

- PERTURBATION ADDITIVE
- si dans FPK, le paramètre de fluctuation est constant

- PERTURBATION MULTIPLICATIVE
- si dans FPK le paramètre de fluctuation dépend de la variable

- CAS CLASSIQUE QUI CONDUIT A UNE DISTRIBUTION GAUSSIENNE
- résolution plus simple
- mode coïncide avec la solution de la partie déterministe
- loi dégénérée : symétrie & support infini
- distribution entropie maximale

- CAS PLUS REALISTE QUI CONDUIT A UNE DISTRIBUTION *WEIBULL*
- résolution plus compliquée
- mode ne coïncide plus avec la solution de la partie déterministe
- loi réaliste : asymétrie et support positif
- contrepartie : famille non exponentielle et estimation plus difficile (absence statistique exhaustive)

DISTRIBUTION DE *WEIBULL*
interprétations du modèle

- INTERPRETATION : NON UNICITE
- APPLICATIONS POTENTIELLES
- MECANISMES DE COMPETITION

$$F(X) = A - B \cdot X^n$$

- ENTRE 2 TERMES DE SIGNES OPPOSES

$$\forall X \qquad B \cdot X^{n+1}$$

- PROCESSUS PLONGES DANS UN ENVIRONNEMENT ALEATOIRE GAUSSIEN
- DE VARIANCE σ^2

- APPLICATIONS POSSIBLES
- (non exhaustives et à formaliser)

- Dynamique corps tournant
- équation premier ordre (charge inertielle)
- interaction couples moteur-résistant
- perturbation aléatoire de la vitesse

- Fiabilité mécanique
- endommagement composant
- interaction entre résistance intrinsèque & sollicitations de l 'environnement

GENESE STOCHASTIQUE DE *WEIBULL*
CONCLUSIONS

- EN GENERAL, UTILISER *A PRIORI* UN MODELE DE REPRESENTATION SANS POUVOIR LE RELIER A UN PROCESSUS PHYSIQUE PEUT CONDUIRE A DES CONCLUSIONS DOUTEUSES

- C 'EST LE CAS DE LA DISTRIBUTION DE *WEIBULL* UTILISEE HABITUELLEMENT DANS LE DOMAINE DE LA FIABILITE QUI TRADUIT UNE CINETIQUE DE DEGRADATION INFINIMENT CROISSANTE

- PAR RAPPORT AUX GENESES STATISTIQUE ET PROBABILISTE, LA GENESE STOCHASTIQUE DE LA DISTRIBUTION DE *WEIBULL* APPORTE DES POSSIBILITES D 'INTERPRETATION PHYSIQUE COMPLEMENTAIRES

THE END

- « QUI PENSE PEU, SE TROMPE BEAUCOUP »
  - *(Léonard de Vinci)*

- THANK YOU FOR YOUR
- ATTENTION

- ANY QUESTIONS ?